# 7 Kordsed integraalid

## 7.1 Kahekordse integraali mõiste

Olgu tõkestatud piirkonnas $D$ määratud kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$. Jagame piirkonna $D$ suvalisel viisil $n$ osapiirkonnaks

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_k,\ \ldots, \Delta s_n,$$

kus $\Delta s_k$, $1 \le k \le n$, tähendab kontekstist sõltuvalt $k$-ndat osapiirkonda või selle pindala.

Valime igas osapiirkonnas suvalise punkti $P_k(\xi_k, \eta_k) \in \Delta s_k$ ja moodustame korrutised $f(P_k)\Delta s_k$. Kui eeldada, et $f(P_k) \ge 0$, siis korrutis tähendab niisuguse püstprisma ruumala, mille põhjaks on $\Delta s_k$ ja kõrgus $f(P_k)$.

Summat

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k$$

nimetetakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ *integraalsummaks* piirkonnas $D$. Geomeetriliselt vastab sellele prismade ruumalade summa.

Piirkonna $\Delta s_k$ diameetriks nimetatakse selle piirkonna punktide vahelist suurimat kaugust

$$\operatorname{diam} \Delta s_k = \max_{P,Q\in\Delta s_k} |\overrightarrow{PQ}|.$$

Jaotus osapiirkondadeks on suvaline. Igal osapiirkonnal on oma diameeter. Neist suurimat tähistame sübmoliga $\lambda$, st

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \operatorname{diam} \Delta s_k.$$

**Definitsioon 1.** Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on piirkond $D$ jaotatud osapiirkondadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid $P_k$ osapiirkondades, siis seda piirväärtust nimetetakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ kahekordseks integraaliks üle piirkonna $D$ ja tähistatakse

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Definitsiooni kohaselt

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k \tag{7.1}$$

Kui $f(x,y) \geq 0$ piirkonnas $D$, siis kahekordne integraal tähendab geomeetriliselt niisuguse kõversilindri ruumala, mis alt on piiratud $xy$-tasandi piirkonnaga $D$, ülalt funktsiooni $z = f(x,y)$ graafikuks oleva pinnaga ja küljelt silinderpinnaga, mille moodustaja on paralleelne $z$-teljega ja juhtjooneks piirkonna $D$ rajajoon.

## 7.2 Kahekordse integraali omadused

**Omadus 1.** Kahe funktsiooni summa kahekordne integraal on võrdne nende funktsioonide kahekordsete integraalide summaga

$$\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

*Tõestus.* Definitsiooni kohaselt

$$\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(P_k) + g(P_k)]\Delta s_k$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \left[ \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k + \sum_{k=1}^{n} g(P_k)\Delta s_k \right]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(P_k)\Delta s_k.$$

Definitsiooni järgi on esimene piirväärtus $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ja teine $\iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

**Omadus 2.** Kui $c$ on konstant, siis

$$\iint\limits_D cf(x,y)dxdy = c \iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

st konstantse teguri saab tuua integraali märgi alt välja.

Tõestus on sarnane omaduse 1 tõestusega.

**Omadus 3.** Kahe funktsiooni vahe kahekordne integraal on võrdne nende funktsioonide kahekordsete integraalide vahega

$$\iint\limits_D [f(x,y) - g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy - \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

Omadus 3 järeldub omadustest 1 ja 2, sest

$$f(x,y) - g(x,y) = f(x,y) + (-1)g(x,y).$$

**Omadus 4.** Kui $D = D_1 \cup D_2$ ning piirkonnad $D_1$ ja $D_2$ ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

*Tõestus.* Kahekordse integraali definitsioonis ei sõltu piirväärtus piirkonna $D$ osapiirkondadeks jaotamise viisist. Seega võime esimeseks jaotusjooneks valida piirkondade $D_1$ ja $D_2$ ühise rajajoone. Jaotades piirkonda $D$ edasi suvalisel viisil, tekivad piirkondade $D_1$ ja $D_2$ suvalised jaotused osapiirkondadeks. Integraalsumma

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k$$

jaotame kaheks liidetavaks. Esimesse liidetavasse võtame need korrutised, mis sisaldavad piirkonna $D_1$ osapiirkondi, selle tähistame

$$\sum_{D_1} f(P_k)\Delta s_k,$$

ja teise liidetavasse need korrutised, mis sisaldavad piirkonna $D_2$ osapiirkondi, selle tähistame

$$\sum_{D_2} f(P_k)\Delta s_k.$$

Esimene summa on funktsiooni $f(x, y)$ integraalsumma üle piirkonna $D_1$ ja teine üle piirkonna $D_2$.

Kui $\lambda$ on piirkonna $D$ kõigi osapiirkondade suurim diameeter, siis sellest, et $\lambda \to 0$ järeldub, et ka piirkondade $D_1$ ja $D_2$ osapiirkondade suurimad diameetrid lähenevad nullile ja omaduse väite saame, kui võrduse

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k = \sum_{D_1} f(P_k)\Delta s_k + \sum_{D_2} f(P_k)\Delta s_k$$

mõlemalt poolt leiame piirväärtuse piirprotsessis $\lambda \to 0$.

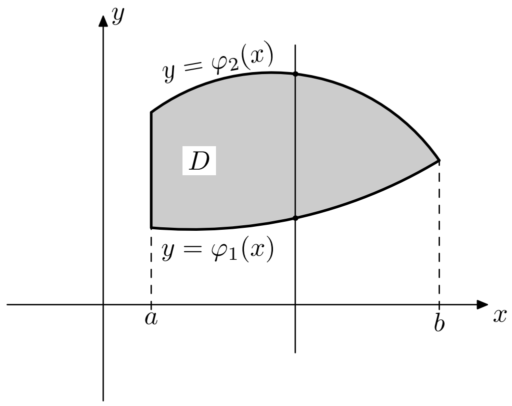
## 7.3 Kahekordse integraali arvutamine

Selles punktis eeldame, et integreerimispiirkond $D$ on tõkestatud ja kinnine. Piirkonda $D$ nimetatakse regulaarseks $y$-telje sihis, kui iga $y$-teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna $D$ sisepunkte, lõikab piirkonna rajajoont kahes punktis.

$y$-telje sihis regulaarne piirkond on kirjeldatav võrratustega $a \leq x \leq b$ ja $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$.

Olgu piirkonnas $D$ määratud pidev funktsioon $f(x, y)$. Integraali

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$




Joonis 7.1. $y$-telje sihis regulaarne piirkond

nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ *kaksikintegraaliks* üle piirkonna $D$. Kaksikintegraali arvutamine seisneb kahe järjestikuse määratud integraali arvutamises. Esiteks arvutatakse nn *seesmine* integraal

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Siin on integreerimismuutujaks $y$ ja muutujat $x$ vaadeldakse integreeerimisel konstandina. Integreerimise tulemuseks on mingisugune muutuja $x$ funktsioon $\Phi(x)$. Teiseks arvutatakse nn *väline* integraal

$$\int_a^b \Phi(x)dx$$

ja tulemuseks on arv.

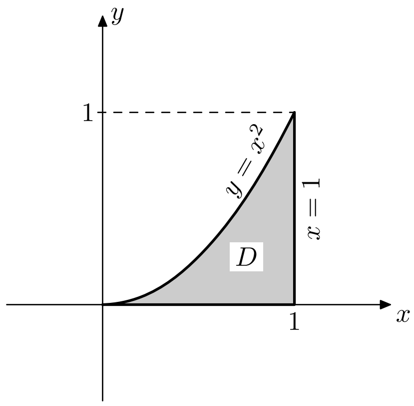
Tavaliselt kasutatakse kaksikintegraali esitamiseks kirjaviisi

$$I_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \tag{7.2}$$

**Näide 1.** Arvutame kaksikintegraali

$$I_D = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y)dy.$$

Integreerimispiirkond $D$ on kirjeldatav võrratustega $0 \le x \le 1$ ja $0 \le y \le x^2$ ja on esitatud joonisel. Esiteks leiame seesmise integraali



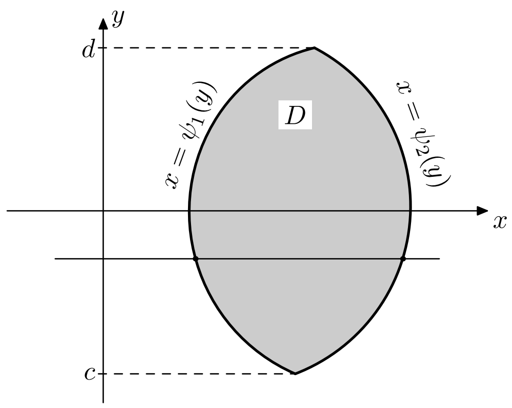

Joonis 7.2. Näidete 1 ja 2 integreerimispiirkond

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{x^2} (x^2 + y)dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^4}{2} = \frac{3x^4}{2}$$

ja seejärel välise integraali

$$I_D = \int\limits_0^1 \frac{3x^4}{2}dx = \frac{3}{2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Piirkonda $D$ nimetatakse regulaarseks $x$-telje sihis, kui iga $x$-teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna $D$ sisepunkte, lõikab piirkonna rajajoont kahes punktis.




Joonis 7.3. $x$-telje sihis regulaarne piirkond

$x$-telje sihis regulaarne piirkond on kirjeldatav võrratustega $c \leq y \leq d$ ja $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$.

Kaksikintegraal üle $x$-telje sihis regularse piirkonna defineeritakse

$$I_D = \int\limits_c^d \left( \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Ka selle kaksikintegraali arvutamine seisneb kahe järjestikuse määratud integraali arvutamises. Esiteks arvutatakse seesmine integraal

$$\Psi(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

ja seejärel väline integraal

$$I_D = \int\limits_c^d \Psi(y)dy.$$

Viimase kaksikintegraali esitamiseks kasutatakse kirjaviisi

$$I_D = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{7.3}$$

Kaksikintegraalis (7.2) on $y$ seesmiseks muutujaks ja $x$ väliseks muutujaks, kaksikintegraalis (7.3) on olukord vastupidine. Üleminekut ühe integreerimisjärjekorralt teisele nimetatakse integreerimisjärjekorra muutmiseks ehk vahetamiseks.

**Näide 2.** Vahetame integreerimisjärjekorra kaksikintegraalis

$$I_D = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy.$$

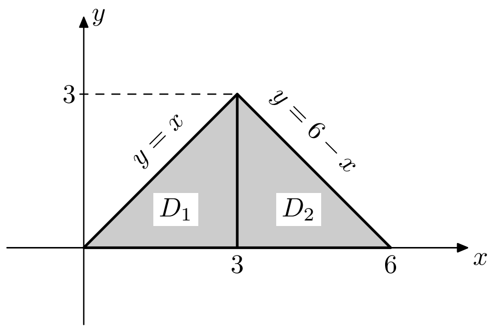
Integreerimispiirkond on joonisel 7.2. Antud kaksikintegraalis on seesmiseks muutujaks $y$ ja väliseks $x$. Pärast integreerimisjärjekorra vahetamist peab väliseks muutujaks olema $y$, mis jääb konstantide vahele, muutuja $x$ rajad võivad sõltuda muutujast $y$. Jooniselt on näha, et $0 \leq y \leq 1$. Parabooli $y = x^2$ võrrandist avaldame $x = \pm\sqrt{y}$. Antud piirkonda piirab parabooli parem haru, kus $x = \sqrt{y}$, seega $x$ muutub piirkonnas $D$ lõigul $\sqrt{y} \leq x \leq 1$. Järelikult saame pärast integreerimisjärjekorra vahetamist kaksikintegraali

$$I_D = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx.$$

**Näide 3.** Vahetame integreerimisjärjekorra kaksikintegraalis

$$I_D = \int\limits_0^3 dy \int\limits_y^{6-y} f(x,y)dx. \qquad (7.4)$$

Integreerimispiirkond on määratud võrratustega $0 \le y \le 3$ ja $y \le x \le 6-y$. Kanname joonisele sirged $y=0$, $y=3$, $x=y$ ja $x=6-y$.




Joonis 7.4. Näite 3 integreerimispiirkond

Ilmselt integreerimispiirkonnas $0 \le x \le 6$ ja $0 \le y \le \varphi(x)$, kus

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } 0 \le x \le 3 \\ 6-x, & \text{kui } 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

Pärast integreerimisjärjekorra vahetamist

$$I_D = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\varphi(x)} f(x,y)dy.$$

Määratud integraali lõigul aditiivsuse omaduse tõttu

$$\begin{aligned} I_D &= \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\varphi(x)} f(x,y)dy + \int\limits_3^6 dx \int\limits_0^{\varphi(x)} f(x,y)dy \\ &= \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_3^6 dx \int\limits_0^{6-x} f(x,y)dy \end{aligned}$$

Piirkonna $D$ jaotamisel sirgega $x=3$ saame kaks regulaarset piirkonda $D_1$ ja $D_2$. Näite 3 tulemust saame tõlgendada kahel viisil. Esiteks, selleks et muuta integreerimise järjekorda kaksikintegraalis (7.4), tuleb see piirkond sirgega $x=3$ jaotada kaheks piirkonnaks $D_1$ ja $D_2$ ja mõlema piirkonna jaoks määrata eraldi rajad. Teiseks, kui jaotada piirkond $D$ $y$-teljega paralleelse sirgega kaheks piirkonnaks $D_1$ ja $D_2$, nii et $D = D_1 \bigcup D_2$, siis

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

Viimane väide jääb ilmselt kehtima ka siis, kui jaotada piirkond $y$-teljega parelleelsete sirgetega kolmeks või enam osapiirkonnaks, ja ka siis, kui jaotada piirkond osapiirkondadeks $x$-teljega paralleelsete sirgete abil. Siit saame kaksikintegraali esimese omaduse.

**Omadus 1.** Kui regulaarne piirkond $D$ jaotada telgedega paralleelsete sirgetega $n$ osapiirkonnaks:

$$D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup \ \ldots \ \bigcup D_n,$$

siis

$$I_D = \sum_{k=1}^{n} I_{D_k}.$$

Vaatleme veel kahte kaksikintegraali omadust. Olgu piirkond $D$ kirjeldatav võrratustega $a \leq x \leq b$ ja $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$.

**Omadus 2.** Kui $m$ on funktsiooni $f(x, y)$ vähim väärtus ja $M$ suurim väärtus regulaarses piirkonnas $D$ ja $S_D$ on piirkonna $D$ pindala, siis

$$m \cdot S_D \leq I_D \leq M \cdot S_D \tag{7.5}$$

*Tõestus.* Eelduse järgi iga $(x, y) \in D$ korral

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

Määratud integraali omaduse tõttu

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m dy \leq \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \leq \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M dy,$$

millest

$$my\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \leq \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \leq My\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}$$

ehk

$$m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \leq \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \leq M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

Kasutades veel kord sama määratud integraali omadust, saame

$$m \int\limits_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx \leq \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \leq M \int\limits_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx$$

ja omadus järeldus sellest, et

$$S_D = \int\limits_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx.$$

**Omadus 3.** Kui funktsioon $f(x,y)$ on pidev regulaarses piirkonnas $D$, siis eksisteerib selline $P(\xi,\eta) \in D$, et

$$I_D = f(\xi,\eta)S_D \tag{7.6}$$

*Tõestus.* Tõkestatud kinnises piirkonnas pidev funktsioon $f(x,y)$ omab vähimat ja suurimat väärtust $m$ ja $M$ selles piirkonnas. Seega kehtib omaduse 2 väide. Jagades võrratused (7.5) piirkonna $D$ pindalaga, saame

$$m \leq \frac{1}{S_D} I_D \leq M.$$

Piirkonnas pidev funktsioon omab kõiki väärtusi vähima ja suurima vahel, sh ka väärtust $\frac{1}{S_D} I_D$. Seega, eksisteerib punkt $P(\xi,\eta) \in D$, milles $f(\xi,\eta) = \frac{1}{S_D} I_D$. Korrutades viimase võrduse uuesti piirkonna $D$ pindalaga $S_D$, saame (7.6).

**Teoreem.** Kui funktsioon $f(x,y)$ on pidev regulaarses piirkonnas $D$, siis

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = I_D. \tag{7.7}$$

*Tõestus.* Kui piirkond $D$ jagada koordinaattelgedega paralleelsete sirgetega $n$ osapiirkonnaks $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$, siis omaduse 1 põhjal

$$I_D = \sum_{k=1}^{n} I_{D_k}.$$

Omaduse 3 põhjal leidub igas osapiirkonnas $D_k$ selline punkt $P_k(\xi_k,\eta_k) \in D_k$, et

$$I_D = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)S_{D_k}.$$

Tähistagu $\lambda$ osapiirkondade $D_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ suurimat diametrit. Leiame viimase võrduse mõlemalt poolt piirväärtus piirprotsessis $\lambda \to 0$. Vasakul pool on arvuline konstant, mille piirväärtus võrdub selle konstandi endaga, paremal pool on aga funktsiooni $f(x,y)$ integraalsumma üle piirkonna $D$, mille piirväärtus on funktsiooni $f(x,y)$ kahekordne integraal üle piirkonna $D$.

Seega on selgunud et punkti alguses defineeritud kaksikintegraal on vahend kahekordse integraali arvutamiseks. Edaspidi loobume terminist kaksikintegraal ja kasutame ainult terminit kahekordse integraali arvutusvalem.

Kui piirkond $D$ on regulaarne $y$-telje sihis, siis arvutatakse kahekordne integraal valemi

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{7.8}$$

abil. Kui $D$ on regulaarne $x$-telje sihis, arvutatakse kahekordne integraal valemi

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{7.9}$$

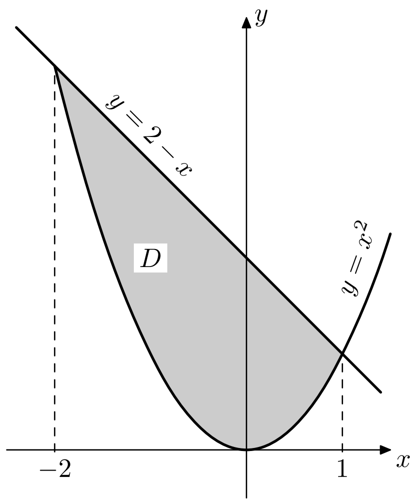
abil.

**Näide 4.** Arvutame kahekordse integraali $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, kui piirkond $D$ on piiratud sirgega $x+y=2$ ja parabooliga $y=x^2$.

Piirkonna joonise tegemiseks leiame parabooli ja sirge lõikepunktide abstsissid võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Asendades teisest võrrandist $y=2-x$ esimesse, saame $x^2+x-2=0$, millest $x_1=-2$ ja $x_2=1$.




Joonis 7.5. Näite 4 integreerimispiirkond

Joonise abil määrame integreerimispiirkonna $D$ rajad $-2 \le x \le 1$ ja $x^2 \le y \le 2-x$. Arvutusvalemist (7.8)

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} (x+y)dy.$$

Arvutame seesmise integraali

$$\int\limits_{x^2}^{2-x} (x+y)dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2-x}$$

$$= \quad x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} = 2 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}$$

ja seejärel välise integraali

$$\int\limits_{-2}^{1} \left(2 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= \quad 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \left(-4 + \frac{4}{3} - 4 + \frac{16}{5}\right) = 4,95.$$

## 7.4 Muutuja vahetus kahekordses integraalis

Alustame kahekordse integraali arvutamise näitest.

**Näide 1.** Arvutame kahekordse integraali

$$\iint\limits_D (2x - 3y - 4)^2 dxdy,$$

kui $D$ on sirgetega $x + y = -1$, $x + y = 3$, $3y - 2x = 6$ ja $2x - 3y = 12$ piiratud piirkond.

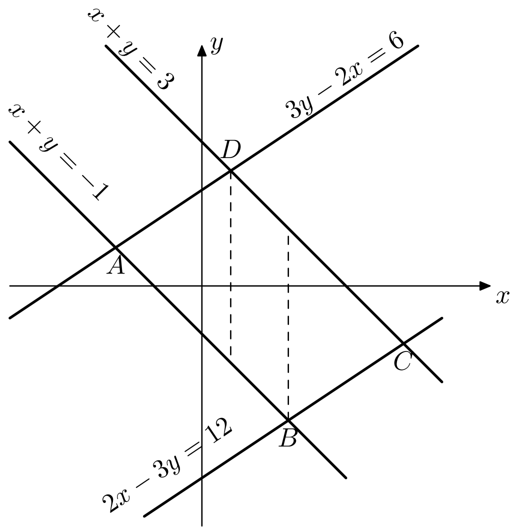
Paneme tähele, et kaks esimest sirget on paralleelsed ning kolmas ja neljas sirge on paralleelsed. Esimese ja kolmanda sirge lõikepunkt on $A\left(-\frac{9}{5}; \frac{4}{5}\right)$, esimese ja neljanda sirge lõikepunkt $B\left(\frac{9}{5}; -\frac{14}{5}\right)$, teise ja neljanda sirge lõikepunkt $C\left(\frac{21}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ ning teise ja kolmanda sirge lõikepunkt $D\left(\frac{3}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

Selleks, et arvutada kahekordset integraali valemi (7.8) abil, peab piirkonna punktidest $D$ ja $B$ tõmmatud vertikaalsete sirgetega kolmeks jaotama, arvutama antud kahekordse integraali üle kolme piirkonna eraldi ning tulemused liitma. See on seotud küllalt mahuka tehnilise tööga, mida on võimalik vältida, kasutades integreerimiseks muutuja vahetust.

Kahekordses integraalis minnakse muutujatelt $x$ ja $y$ muutujatele $u$ ja $v$ seoste

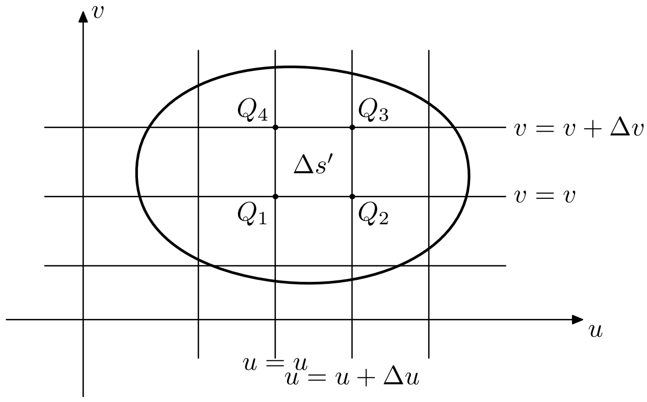
$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \tag{7.10}$$

abil. Eeldame, et kahe muutuja funktsioonid $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ on vaadeldavas $uv$-tasandi piirkonnas ühesed, pidevad ning omavad pidevaid osatuletisi mõlema muutuja järgi. Lisaks eeldame, et võrrandisüsteem (7.15)




Joonis 7.6. Näite integreerimispiirkond

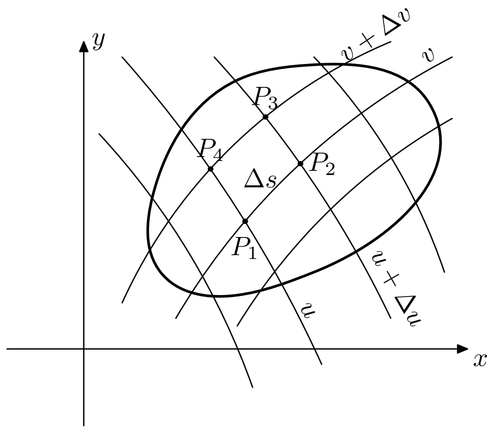
on üheselt lahenduv muutujate $u$ ja $v$ suhtes. Sellisel juhul vastab igale $xy$-tasandi punktile piirkonnas $D$ parajasti üks $uv$-tasandi punkt piirkonnas $D'$ ja vastupidi. Jaotame $uv$-tasandi piirkonna $D'$ koordinaattelgedega paralleelsete sirgetega osapiirkondadeks ja vaatleme osapiirkonda $\Delta s'$ Piirkonna




Joonis 7.7. Piirkond $D'$

$\Delta s'$ pindala on $\Delta s' = \Delta u \Delta v$. Kui $u$ on konstantne, siis võrrandid (7.15) on mingisuguse joone parameetrilisteks võrranditeks parameetirga $v$ ja kui $v$ on konstantne, siis on võrrandid (7.15) samuti mingisuguse joone parameetrilisteks võrranditeks parameetirga $u$. Seega vastab sirgetele $u = const$, $u + \Delta u = const$, $v = const$ ja $v + \Delta v = const$ jooned $xy$-tasandil. Seejuures punktile $Q_1(u, v)$ vastab punkt $P_1(\varphi(u, v), \psi(u, v))$, punktile $Q_2(u + \Delta u, v)$ punkt $P_2(\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$, punktile $Q_3(u + \Delta u, v + \Delta v)$ punkt

$P_3(\varphi(u+\Delta u, v+\Delta v), \psi(u+\Delta u, v+\Delta v))$ ja punktile $Q_4(u, v+\Delta v)$ punkt $P_4(\varphi(u, v+\Delta v), \psi(u, v+\Delta v))$ Osapiirkonda $\Delta s$ võime lähendada vektori-




Joonis 7.8. Piirkond $D$

tele $\overrightarrow{P_1P_2}$ ja $\overrightarrow{P_1P_4}$ moodustatud rööpkülikuga. Kahele vektorile ehitatatud rööpküliku pindala võrdub nende vektorite koordinaatidest moodustatud determinandi absoluutväärtusega. Et $\overrightarrow{P_1P_2} = (\varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u, v), \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u, v)$ ja $\overrightarrow{P_1P_4} = (\varphi(u, v+\Delta v) - \varphi(u, v), \psi(u, v+\Delta v - \psi(u, v))$, siis

$$\Delta s = \left| \begin{vmatrix} \varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u, v) & \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u, v) \\ \varphi(u, v+\Delta v) - \varphi(u, v) & \psi(u, v+\Delta v - \psi(u, v) \end{vmatrix} \right|.$$

Tehtud eeldustel on funktsioonide $x = \varphi(u, v)$ ja $y = \psi(u, v)$ täismuutude avaldisteks

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v$$

ning

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_3 \Delta u + \varepsilon_4 \Delta v,$$

kus $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ja $\varepsilon_4$ on lõpmatult kahanevad suurused piirprotsessis $(\Delta u, \Delta v) \to (0; 0)$.

Pindala $\Delta s$ arvutamiseks moodustatud determinandi esimeses reas on funktsioonide $x$ ja $y$ osamuudud $u$ järgi ja teises reas osamuudud $v$ järgi, st täismuutude avaldises on esimesel juhul $\Delta v = 0$ ja teisel juhul $\Delta u = 0$. Seega

$$\varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \varepsilon_1 \Delta u,$$

$$\psi(u+\Delta u, v) - \psi(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \varepsilon_3 \Delta u,$$

$$\varphi(u, v+\Delta v) - \varphi(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_2 \Delta v$$

ja

$$\psi(u, v+\Delta v) - \psi(u,v) = \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_4 \Delta v.$$

Ignoreerides $\Delta u$ ja $\Delta v$ suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanevaid suurusi $\varepsilon_1\Delta u$, $\varepsilon_3\Delta u$, $\varepsilon_2\Delta v$ ja $\varepsilon_4\Delta v$ saame pindala $\Delta s$ arvutamiseks ligikaudse valemi

$$\Delta s \approx | \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix} | = | \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} | \Delta u \Delta v. \tag{7.11}$$

Võrduses (7.11) esinevat funktsionaaldeterminanti nimetatakse Jacobi determinandiks ehk *jakobiaaniks* ja tähistatakse

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7.12}$$

Oleme saanud piirkondade $D$ ja $D'$ osapiirkondade pindalade vahel ligikaudse võrduse

$$\Delta s \approx |J| \Delta s', \tag{7.13}$$

mis on seda täpsem, mida väiksemad on $\Delta u$ ja $\Delta v$ (aga siis pidevuse tõttu ka $\Delta x$ ja $\Delta y$). Kahekordne integraal on defineeritud integraalsumma piirväärtusena osapiirkondade suurima diameetri $\lambda$ lähenemisel 0-le, st (jättes indeksid kirjutamata)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \sum f(\xi, \eta)\Delta s,$$

kus $P(\xi, \eta)$ on osapiirkonnast $\Delta s$ vabalt valitud punkt. Olgu $(\overline{u}, \overline{v})$ piirkonna $\Delta s'$ punkt, mis vastab punktile $P(\xi, \eta) \in \Delta s$. Siis piirkondade pindalade vahelise seose (7.13) tõttu

$$\sum f(\xi,\eta)\Delta s = \sum f(\varphi(\overline{u}, \overline{v}), \psi(\overline{u}, \overline{v}))|J|\Delta s', \tag{7.14}$$

kus viimane summa on võetud üle kõigi piirkonna $D'$ osapiirkondade $\Delta s'$. Kui $\lambda'$ tähistab piirkonna $D'$ osapiirkondade suurimat diameetrit, siis

$$\lim_{\lambda'\to 0} \sum f(\varphi(\overline{u}, \overline{v}), \psi(\overline{u}, \overline{v}))|J|\Delta s' = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J|dudv.$$

Kui $\lambda' \to 0$, siis funktsioonide $x = \varphi(u,v)$ ja $y = \psi(u,v)$ pidevuse tõttu ka $\lambda \to 0$. Võttes võrdusest (7.14) mõlemalt poolt piirväärtuse piirprotsessis $\lambda' \to 0$, saame muutja vahetuse valemi kahekordses integraalis

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J|dudv. \tag{7.15}$$

Pöördume tagasi punkti alguses tooodud näite juurde ja teeme kahekordses integraalis muutuja vahetuse

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - 3y \end{cases} \tag{7.16}$$

Sellises juhul $xy$-tasandi rööpkülik teiseneb $uv$-tasandi ristkülikuks, mis on määratud tingimustega $-1 \leq u \leq 3$ ja $-6 \leq v \leq 12$. Integreeritav funktsioon $(2x - 3y - 4)^2 = (v - 4)^2$. Jakobiaani (7.12) arvutamiseks avaldame võrrandisüsteemist (7.16) muutujad $x$ ja $y$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}u + \dfrac{1}{5}v \\ \\ y = \dfrac{2}{5}u - \dfrac{1}{5}v \end{cases}$$

ja leiame osatuletised

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2}{5},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{5}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{5}.$$

Seega

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5} \\ \\ \dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{1}{5}$$

ja muutja vahetuse valemi abil (7.15) leiame

$$\iint\limits_D (2x - 3y - 4)^2 dxdy = \iint\limits_{D'} (v - 4)^2 \frac{1}{5} dudv = \frac{1}{5} \int\limits_{-1}^{3} du \int\limits_{-6}^{12} (v - 4)^2 dv = 403\frac{1}{5}$$

## 7.5 Kahekordne integraal polaarkoordinaatides

Kui ristkoordinaadistik on asetatud polaarkoordinaadistiku suhtes tavalisel viisil, st $x$-telg ühtib polaarteljega ja $y$-telg läbib poolust, siis üleminek ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele toimub seoste

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \end{cases} \tag{7.17}$$

abil, kus $\varphi$ tähistab polaarnurka ja $\varrho$ polaarraadiust.

Konstantsetele polaarnurkadele polaarkoordinaatides vastavad koordinaatide alguspunktist lähtuvad sirged ristkoordinaadistikus ja konstantsetele polaarraadiustele vastavad ringjooned keskpunktiga koordinaatide alguses. Seega on muutuja vahetust (7.17) eelkõige sobiv kasutada juhul, kui integreerimispiirkonnaks ristkoordinadistikus on ring või mingi ringi osa.

Muutuja vahetuse valemi (7.15) kasutamiseks leiame $f(x,y) = f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)$ ja jakobiaani

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\varrho$$

ja arvestades sellega, et $\varrho$ kui polaarraadius on mittenegatiivne $|J| = \varrho$.

Tähistame $xy$-tasandi piirkonnale $D$ vastava piirkonna $\varphi\varrho$-tasandil sümboliga $\Delta$. Siis muutja vahetuse valemist (7.15) saame üleminekul ristkoordinaatidest polaarkoordinaatidesse valemi

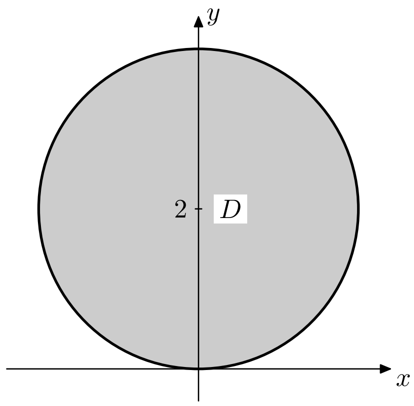
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho d\varphi d\varrho. \qquad (7.18)$$

**Näide 1.** Teisendame polaarkoordinaatidesse kahekordse integraali

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

kui integreerimispiirkonnaks $D$ on ring $x^2 + y^2 \leq 4y$.

Piirkond $D$ on piiratud ringjoonega $x^2 + y^2 = 4y$, mille teisendamisel saame $x^2 + y^2 - 4y = 0$, st $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$ ehk $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Seega ringjoone keskpunktiks on $(0; 2)$ ja raadiuseks 2.




Joonis 7.9. Ring $x^2 + y^2 \leq 4y$

$x$-telg on ringjoone puutujaks, seega polaarnurk muutub $0 \leq \varphi \leq \pi$. Polaarraadius algab iga nurga korral 0-st. Suurim kaugus on ringjoonel ja seega sõltub polaarnurgast. Sõltuvuse kindlakstegemiseks asendame üleminekuvalemitest (7.17) $x$ ja $y$ ringjoone võrrandisse $\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi = 4\varrho\sin\varphi$, millest

$$\varrho = 4\sin\varphi.$$

Valemi (7.18) põhjal kirjutame

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho d\varphi d\varrho,$$

kus integreerimispiirkond $\Delta$ rahuldab tingimusi $0 \le \varphi \le \pi$ ja $0 \le \varrho \le 4\sin\varphi$. Kahekordse integraali arvutusvalemi järgi

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho d\varrho.$$

**Näide 2.** Arvutame polaarkoordinaatide abil kahekordse integraali

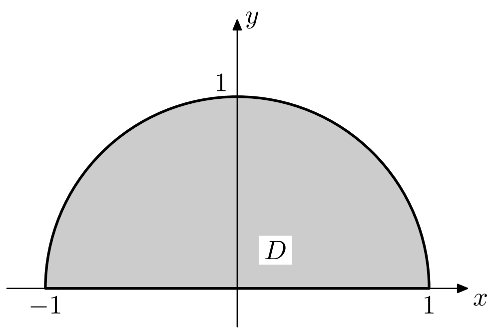
$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1},$$

kui integreerimispiirkond $D$ on piiratud joontega $y = 0$ ja $y = \sqrt{1-x^2}$.

Et $x^2+y^2+1 = \varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi + 1 = \varrho^2+1$, siis

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1} = \iint\limits_\Delta \frac{\varrho d\varphi d\varrho}{\varrho^2+1}.$$

Piirkond $D$ on piiratud $x$-teljega ja ringjoone $x^2+y^2=1$ ülemise poolega.




Joonis 7.10. Poolring, mis on piiratud $x$-teljega ja poolringjoonega $y = \sqrt{1-x^2}$

Piirkonnale $D$ vastav piirkond polaarkoordinaadistikus $\Delta$ on määratud võrratustega $0 \le \varphi \le \pi$ ja $0 \le \varrho \le 1$, seega

$$\iint\limits_\Delta \frac{\varrho d\varphi d\varrho}{\varrho^2+1} = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\varrho d\varrho}{\varrho^2+1}.$$

Leiame seesmise integraali

$$\int_0^1 \frac{\varrho d\varrho}{\varrho^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(\varrho^2+1)}{\varrho^2+1} = \frac{1}{2}\ln(\varrho^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

ja välise integraali

$$\int_0^\pi \frac{1}{2}\ln 2 d\varphi = \frac{1}{2}\ln 2\int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

## 7.6 Pindalade ja ruumalade arvutamine kahekordse integraali abil

Kahekordse integraali defineerimisel veendusime, et kui funktsioon $f(x,y) \geq 0$ piirkonnas $D$, siis geomeetriliselt tähendab kahekordne integraal

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

niisuguse kõversilindri ruumala, mis alt on piiratud $xy$-tasandi piirkonnaga $D$, ülalt funktsiooni $z = f(x,y)$ graafikuks oleva pinnaga ja küljelt silinderpinnaga, mille moodustaja on paralleelne $z$-teljega ja juhtjooneks piirkonna $D$ rajajoon.

Eeldame, et piirkonnas $D$ on täidetud tingimus $f(x,y) \geq g(x,y)$. Kahekordse integraali omaduse tõttu

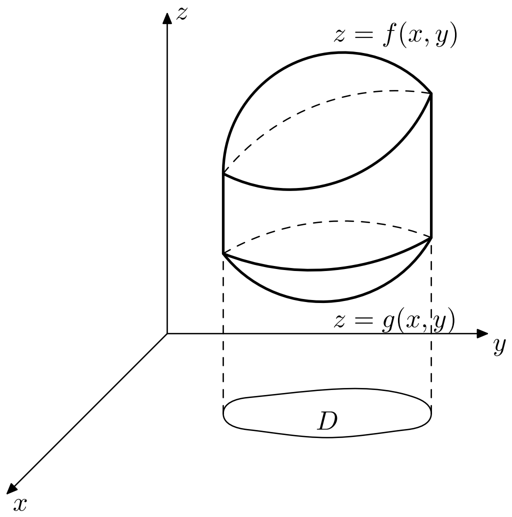
$$\iint_D [f(x,y) - g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy - \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Mõlemad kahekordsed integraalid tähendavad geomeetriliselt kõversilindri ruumalasid, esimene neist on pealt piiratud funktsiooni $z = f(x,y)$ graafikuga ja teine funktsiooni $z = g(x,y)$ graafikuga. Seega nende vahe tähendab niisuguse kõversilindri ruumala, mis pealt on piiratud funktsiooni $z = f(x,y)$ graafikuga, alt funktsiooni $z = g(x,y)$ graafikuga ja küljelt silinderpinnaga, mille moodustaja on paralleelne $z$-teljega ning juhtjooneks piirkonna $D$ rajajoon. Joonisel 7.11 oleva kõversilindri ruumala arvutatakse valemist

$$V = \iint_D [f(x,y) - g(x,y)]dxdy. \tag{7.19}$$

**Näide 1.** Arvutame tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$ piiratud piirkonna ruumala.

Antud tasanditega piiratud piirkonnaks on joonisel 7.12 esitatud püramiid.




Joonis 7.11. Kõversilinder

Antud piirkonda piirab ülalt tasapind $z = 1 - x - y$ ja alt $xy$-tasand $z = 0$. Valemis (7.19) $f(x, y) = 1 - x - y$ ja $g(x, y) = 0$. Püramiidi ruumala on valemi järgi

$$V = \iint\limits_D (1 - x - y)dxdy.$$

Piirkond $D$ on määratud tingimustega $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1 - x$, seega

$$V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)dy.$$

Arvutame kõigepealt seesmise integraali

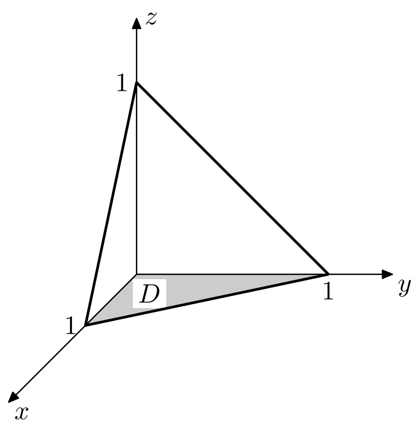
$$\int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dy = -\int\limits_0^{1-x} (1-x-y)d(1-x-y) = -\frac{(1 - x - y)^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} = \frac{(1 - x)^2}{2}$$

ja seejärel välise integraali

$$V = \int\limits_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2}dx = -\int\limits_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2}d(1 - x) = -\frac{(1 - x)^3}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Kui kõversilindri kõrgus $f(x, y) = 1$ igas piirkonna $D$ punktis, siis selle ruumala $V = S_D \cdot 1$, kus $S_D$ tähistab põhja pindala. Asendades funktsiooni $f(x, y) = 1$ ruumala arvutamise valemisse

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

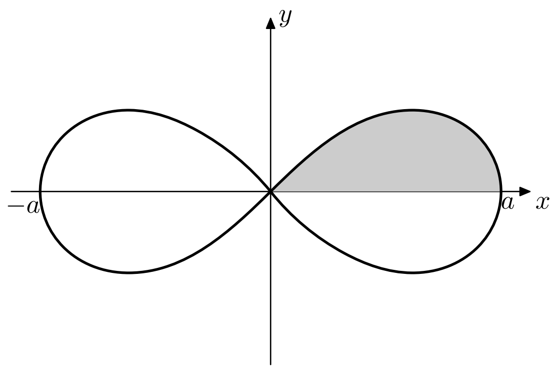



Joonis 7.12. Näite 1 piirkond

saame tasandilise piirkonna $D$ pindala arvutamiseks valemi

$$S_D = \iint\limits_D dxdy. \tag{7.20}$$

**Näide 2.** Arvutame lemniskaadiga $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ piiratud kujundi pindala.




Joonis 7.13. Lemniskaat

Teisendades lemniskaadi võrrandi polaarkoordinaatidesse, saame $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Seega $-\dfrac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, millest $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ või $\dfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{4}$.

Lemniskaat on sümmeetriline nii $x$- kui ka $y$-telje suhtes. Arvutame lemniskaadiga piiratud kujundi koordinaattasandi esimesse veerandisse jääva osa pindala ja korrutame 4-ga. Valemis (7.20) on integreerimispiirkonnaks veerand lemniskaadiga piiratud piirkonnast. Teisendades integraali polaarkoordinaatidesse, saame

$$S = 4\iint\limits_{D} dxdy = 4\iint\limits_{\Delta} \varrho d\varphi d\varrho.$$

Integreerimispiirkond $\Delta$ on polaarkoordinaatides määratud tingimustega $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$ ja $0 \leq \varrho \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}$, järelikult

$$S = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \varrho d\varrho.$$

Seesmise integraali arvutamisel saame

$$\int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \varrho d\varrho = \frac{\varrho^2}{2}\Bigg|_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a^2}{2}\cos 2\varphi$$

ja

$$S = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{2}\cos 2\varphi d\varphi = a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = a^2 \sin 2\varphi\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

## 7.7 Kolmekordse integraali mõiste ja omadused

Olgu ruumilises piirkonnas $V$ määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$. Jaotame piirkonna $V$ suvalise viisil $n$ osapiirkonnaks

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \ldots,\ \Delta v_k,\ \ldots, \Delta v_n,$$

kusjuures kontekstist sõltuvalt $\Delta v_k$ tähistab nii $k$-ndat osapiirkonda kui ka selle ruumala.

Valime igast osapiirkonnast suvalise punkti $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$ ja moodustame korrutised $f(P_k)\Delta v_k$. Kõikide korrutiste summerimisel saame summa

$$\sum_{k=0}^{n} f(P_k)\Delta v_k, \tag{7.21}$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x, y, z)$ integraalsummaks üle piirkonna $V$.

Olgu

$$\operatorname{diam} \Delta v_k = \max_{P,Q\in\Delta v_k} |\overrightarrow{PQ}|$$

piirkonna $\Delta v_k$ diameeter ja tähistagu $\lambda$ piirkondade diameetritest suurimat, st

$$\lambda = \max_{0\leq k\leq n} \operatorname{diam} \Delta v_k.$$

**Definitsioon.** Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n} f(P_k)\Delta v_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on piirkond $V$ jaotatud osapiirkondadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid $P_k$ osapiirkondades, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x, y, z)$ kolmekordseks integraaliks üle piirkonna $V$ ja tähistatakse

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n} f(P_k)\Delta v_k. \tag{7.22}$$

Kolmekordse integraali omadused on sarnased kahekordse integraali vastavate omadustega.

**Omadus 1.**

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz.$$

**Omadus 2.** Kui $c$ on konstant, siis

$$\iiint\limits_V cf(x,y,z)dxdydz = c\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz,$$

st konstantse teguri saab tuua kolmekordse integraali märgi alt välja (viia kolmekordse integraali märgi alla).

**Omadus 3.** Kui $V = V_1 \bigcup V_2$ ja piirkonnad $V_1$ ja $V_2$ ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Kui eeldada, et piirkonnas $V$ on $f(x, y, z) \geq 0$, siis võime seda funktsiooni tõlgendada aine tihedusena punktis $(x, y, z)$. Siis ühe punkti $P_k$ fikseerimine osapiirkonnas $\Delta v_k$ tähendab seda, et kogu osapiirkonnas on aine tihedus loetud konstantseks, st selliseks, mis on aine tihedus selles väljavalitud punktis. Sellisel juhul korrutis $f(P_k)\Delta v_k$ on tihedus korda osapiirkonna ruumala ehk ligikaudu osapiirkonna mass. Ligikaudu sellepärast, et osapiirkonnas muutuv tihedus on loetud konstantseks.

Integraalsumma tähendab sellisel juhul ligikaudu kogu piirkonna $V$ massi. Piirprotsess $\lambda \to 0$ tähendab seda, et kõikide osapiirkondade diameetrid kahanevad. Järelikult hakkab aine tihedus ühes suvaliselt väljavalitud punktis üha täpsemalt iseloomustama tihedust kogu osapiirkonnas. Kokku võttes, tõlgendades integreeritavat funktsiooni $f(x, y, z)$ aine tihedusena, tähendab kolmekordne integraal piirkonna $V$ massi.

Kui piirkond $V$ on täidetud ainega, mille tihedus igas punktis $f(x, y, z) \equiv 1$, siis piirkonna $V$ mass ja ruumala on arvuliselt võrdsed, seega piirkonna $V$ ruumala on arvutatav kolmekordse integraali

$$V = \iiint\limits_V dxdydz \tag{7.23}$$

abil. Näidet selle valemi kasutamise kohta vaatleme allpool.

## 7.8 Kolmekordse integraali arvutamine

Ruumilist piirkonda $V$ nimetatakse regulaarseks, kui on täidetud järgmised tingimused.

1. Iga $z$-teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna sisepunkte, lõikab piirkonna rajapinda kahes punktis.

2. Piirkonna projektsioon $xy$-tasandil on regulaarne tasandiline piirkond.

3. Kui piirkonda lõigata mingi koordinaattasandiga paralleelse tasandiga, siis lõike tagajärjel tekkinud osad on omadustega 1. ja 2.

Regulaarne piirkond $V$ on kirjeldatav tingimustega $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ ja $\psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)$. Sellisel juhul on kolmekordne integraal arvutatav valemist

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \tag{7.24}$$

Kui kahekordse integraali korral on võimalik kasutada kaht erinevat integreerimisjärjekorda, siis kolmekordse integraali korral on erinevaid integreerimisjärjekordi 6 ja peale valemi (7.24) on võimalik kasutada veel viit arvutusvalemit.

Valemi (7.24) kasutamisel arvutatakse järjest kolm määratud integraali. Kõigepealt seesmine integraal muutuja $z$ järgi (siis $x$ ja $y$ loetakse integreerimisel konstantideks)

$$\Psi(x, y) = \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

seejärel integreeritakse muutuja $y$ järgi ja leitakse

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Psi(x,y)dy$$

ning lõpuks integreeritakse muutuja $x$ järgi

$$\int\limits_a^b \Phi(x)dx.$$

**Näide.** Arvutame kolmekordse integraali

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz,$$

kui piirkond $V$ on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.

Integreerimispiirkond on joonisel 7.12. Joonise abil määrame rajad kolmekordse integraali arvutamiseks: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$ ja $0 \leq z \leq 1-x-y$. Seega

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz.$$

Arvutame seesmise integraali

$$\int\limits_0^{1-x-y} xyzdz = xy\frac{z^2}{2}\bigg|_0^{1-x-y} = xy\frac{(1-x-y)^2}{2},$$

seejärel integreerime $y$ järgi

$$\int\limits_0^{1-x} xy\frac{(1-x-y)^2}{2}dy = \frac{x}{2}\int\limits_0^{1-x} y[(1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2]dy$$

$$= \frac{x}{2}\left[(1-x)^2\frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]\bigg|_0^{1-x}$$

$$= \frac{x}{2}\left[\frac{(1-x)^4}{2} - \frac{2(1-x)^4}{3} + \frac{(1-x)^4}{4}\right] = \frac{x(1-x)^4}{24}$$

ja lõpuks

$$\frac{1}{24}\int\limits_0^1 x(1-x)^4dx = -\frac{1}{24}\int\limits_0^1 (-x)(1-x)^4dx$$

$$= -\frac{1}{24}\int\limits_0^1 (1-x-1)(1-x)^4dx = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 [(1-x)^5 - (1-x)^4]d(1-x)$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{(1-x)^6}{6} - \frac{(1-x)^5}{5}\right]\bigg|_0^1 = \frac{1}{24}(-\frac{1}{6} + \frac{1}{5}) = \frac{1}{720}$$

## 7.9 Muutuja vahetus kolmekordses integraalis

Seame eesmärgiks teisendada kolmekordne integraal

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

üle piirkonna $V$ $xyz$-koordinaadistikus kolmekordseks integraaliks üle piirkonna $V'$ $uvw$-koordinaadistikus teisenduste

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases} \tag{7.25}$$

abil. Eeldame, et kolme muutuja $u$, $v$ ja $w$ funktsioonid $x$, $y$ ja $z$ on ühesed ja võrrandisüsteem (7.25) on üheselt lahenduv muutujate $u$, $v$ ja $w$ suhtes. Siis vastab igale piirkonna $V'$ punktile üks punkt piirkonnast $V$ ja vastupidi. Lisaks eeldame funktsioonide (7.25) kohta, et need on pidevad ja neil on pidevad osatuletised kõigi kolme muutuja järgi piirkonnas $V'$.

Muutuja vahetuse jakobiaan on kolmandat järku determinant

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} \tag{7.26}$$

ja kolmekordne integraal üle piirkonna $V$ teisendatakse kolmekordseks integraaliks üle piirkonna $V'$ valemi

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|J|dudvdw \tag{7.27}$$

abil.

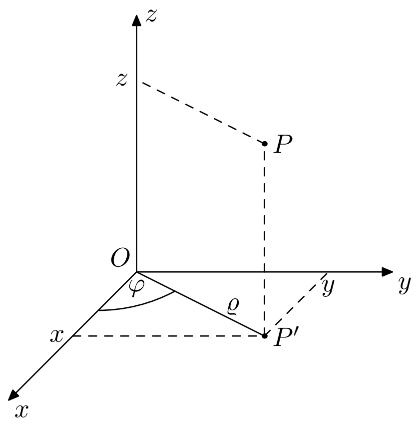
## 7.10 Kolmekordne integraal silinderkoordinaatides

Olgu antud $xyz$-koordinaadistikus punkt $P(x,y,z)$. Tähistame selle punkti projektsiooni $xy$-tasandile $P'$. Tähistame punkti $P'$ kaugust koordinaatide alguspunktist $\varrho$ ja lõigu $P'O$ ning $x$-telje vahelist nurka $\varphi$. Suurustel $\varphi$ ja $\varrho$ on sama tähendus, mis tasandilisel juhul polaarkoordinaatidel.

**Definitsioon.** Punkti $P$ silinderkoordinaatideks nimetatakse suurusi $\varphi$, $\varrho$ ja $z$.

Et $\varphi$-l ja $\varrho$-l on sama tähendus, mis polaarkoordinaatidel ja kolmanda koordinaadiga teisendust ei tehta, on üleminku valemiteks ristkoordinaatidelt silinderkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ z = z. \end{cases} \tag{7.28}$$




Joonis 7.14. Punkti $P$ silinderkoordinaadid $\varphi$, $\varrho$ ja $z$

Leiame muutuja vahetuse jakobiaani üleminekul ristkoordinaatidelt silinderkoordinaatidele. Arvutuseeskirja (7.26) järgi

$$J = \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\varrho & y'_\varrho & z'_\varrho \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix}.$$

Muutuja $z$ ei sõltu muutujatest $\varphi$ ja $\varrho$, seega $z'_\varphi = 0$ ja $z'_\varrho = 0$. Muutujad $x$ ja $y$ ei sõltu muutujast $z$, st $x'_z = 0$ ja $y'_z = 0$. Järelikult

$$J = \begin{vmatrix} -\varrho \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Arendades saadud determinanti viimase rea või viimase veeru järgi, saame

$$J = \begin{vmatrix} -\varrho \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\varrho\sin^2\varphi - \varrho\cos^2\varphi = -\varrho.$$

Arvestades sellega, et $\varrho$ tähistab kaugust, on $|J| = \varrho$.

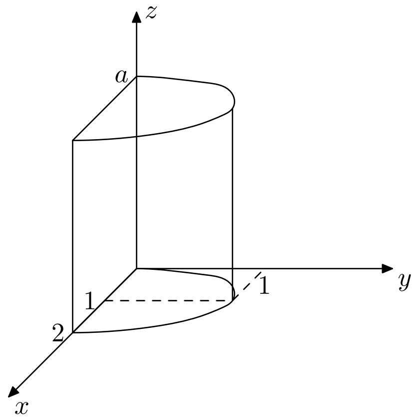
Tähistagu $V'$ piirkonnale $V$ vastavat piirkonda silinderkoordinaatides. Üldise muutuja vahetuse valemi (7.27) põhjal saame valemi üleminekuks kolmekordses integraalis ristkoordinaatidelt silinderkoordinaatidele

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\varrho d\varphi d\varrho dz \qquad (7.29)$$

**Näide.** Arvutame silinderkoordinaatide abil kolmekordse integraali

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$$

Integreerimispiirkond on määratud ristkoordinaadistikus võrratustega $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$ ja $0 \leq z \leq a$, st piiratud tasanditega $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$ ja $z = a$ ning silindriga $y = \sqrt{2x - x^2}$. Silindri moodustaja on $z$-teljega paralleelne ja projektsioon $xy$-tasandil poolringjoon $y = \sqrt{2x - x^2}$. See on ülemine pool ringjoonest $y^2 = 2x - x^2$ ehk $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$, st ringjoonest keskpunktiga $(1; 0)$ ja raadiusega 1.




Joonis 7.15. Näite integreerimispiirkond

Teisendame valemite (7.28) abil antud kolmekordse integraali silinderkoordinaatidesse. Joonisel oleva poolsilindri moodustumiseks peab nurk $\varphi$ muutuma lõigul $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$. Teisendades silindri võrrandi $x^2 + y^2 = 2x$ silinderkoordinaatidesse, saame $\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi = 2\varrho \cos \varphi$ ehk $\varrho = 2 \cos \varphi$. Järelikult kaugus $0 \leq \varrho \leq 2 \cos \varphi$. Kolmanda koordinaadiga teisendust ei toimu, seega endiselt $0 \leq z \leq a$.

Integreeritav funktsioon on silinderkoordinaatides

$$z\sqrt{\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi} = z\varrho$$

ja antud kolmekordne integraal on pärast teisendamist silinderkoordinaatidesse

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} d\varrho \int\limits_0^a z\varrho \cdot \varrho dz.$$

Integreerime muutuja $z$ järgi

$$\int\limits_0^a z\varrho^2 dz = \varrho^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2\varrho^2}{2}.$$

Seejärel integreerime muutuja $\varrho$ järgi

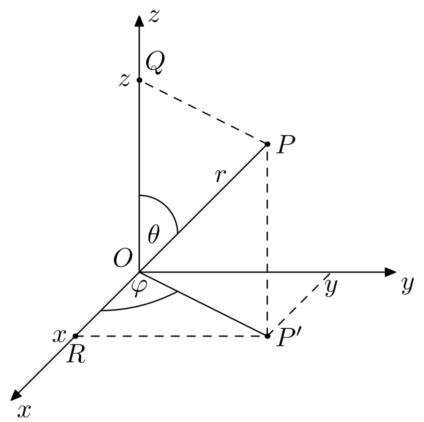
$$\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\cos\varphi}\varrho^2 d\varrho = \frac{a^2}{2}\frac{\varrho^3}{3}\bigg|_0^{2\cos\varphi} = \frac{4a^2\cos^3\varphi}{3}.$$

Lõpuks integreerime nurga $\varphi$ järgi

$$\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) = \frac{4a^2}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^2}{9}.$$

## 7.11 Kolmekordne integraal sfäärkoordinaatides

Olgu antud ristkoordinaadistikus üks punkt $P(x, y, z)$. Tähistame $P$ projektsiooni $xy$-tasandil $P'$. Tähistagu $\varphi$ punkti $P'$ ja koordinaatide alguspunkti vahelise sirglõigu ja $x$-telje vahelist nurka, $\theta$ punkti $P$ ja koordinaatide alguspunkti vahelise sirglõigu ja $z$-telje vahelist nurka ning $r$ punkti $P$ kaugust koordinaatide alguspunktist.




Joonis 7.16. Punkti $P$ sfäärkoordinaadid $\varphi$, $\theta$ ja $r$

Joonisel 7.16 on punkt $P$ valitud nii, et selle koordinaadid on kõik positiivsed. Punkti abstsiss $x$ on lõigu $OR$ pikkus, ordinaat $y$ lõigu $RP'$ pikkus ja aplikaat $z$ lõigu $OQ$ pikkus.

Täisnurksest kolmnurgast $OQP$ saame, et

$$\sin\theta = \frac{QP}{r}$$

ja

$$\cos\theta = \frac{z}{r}.$$

Et $OP' = QP$, siis esimesest seosest $OP' = r\sin\theta$. Teisest $z = r\cos\theta$.

Täisnurksest kolmnurgast $ORP'$ saame

$$\sin\varphi = \frac{y}{OP'},$$

millest $y = OP'\sin\varphi$, ja

$$\cos\varphi = \frac{x}{OP'},$$

millest $x = OP'\cos\varphi$. Asendades $OP'$ koordinaatide $x$ ja $y$ avaldistesse saame ülemineku valemid ristkoordinaatidelt sfäärkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{7.30}$$

Leiame muutuja vahetuse jakobiaani üleminekul ristkoordinaatidelt sfäärkoordinaatidele. Arvutuseeskirja (7.26) järgi

$$J = \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_r & y'_r & z'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Determinandi arendus

$$J = -r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos^2\theta - r^2\cos^2\varphi\sin^3\theta - r^2\sin^2\varphi\sin^3\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos^2\theta.$$

Liites omavahel 1. ja 4. ning 2. ja 3. liikme, saame

$$\begin{aligned} J &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= -r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Sfäärkoordinaatides on $\theta$ nurk, mida mõõdetakse $z$-telje suhtes, seega $0 \le \theta \le \pi$. Siis $\sin\theta \ge 0$ ja jakobiaani absoluutväärtus

$$|J| = r^2\sin\theta.$$

Tähistagu $V'$ piirkonnale $V$ vastavat piirkonda sfäärkoordinaatides. Muutuja vahetuse valemist (7.27) saame kolmekordse integraali teisendamise valemi sfäärkoordinaatidesse

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr. \tag{7.31}$$

Edasi tuleb arvutamiseks määrata rajad sfäärkoordinaatide jaoks.

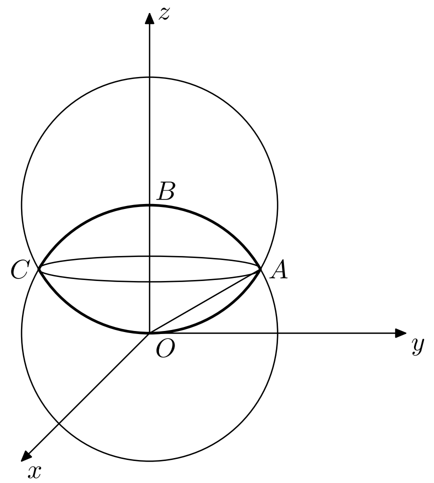
Sfäärkoordinaate kasutatakse kolmekordse integraali arvutamiseks eelkõige juhul, kui integreerimispiirkond on piiratud sfääri või selle osaga, st integreerimispiirkonnaks on kera või mingi kera osa.

**Näide.** Teisendame sfäärkoordinaatidesse kolmekordse integraali

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

ja määrame rajad sfäärkoordinaatides, kui $V$ on sfääridega $x^2+y^2+z^2=R^2$ ja $x^2+y^2+z^2=2Rz$ piiratud kerade ühisosa.

Teise sfääri võrrand on teisendatav võrduseks $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$, st selle sfääri keskpunkt $B(0;0;R)$ on $z$-teljel.




Joonis 7.17. Kerade ühisosa

Kahe kera ühisosa on pöördkeha, mille pöörlemisteljeks $z$-telg. Seega nurk $\varphi$ teeb täispöörde, st $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Kauguse muutumise pärast tuleb piirkond kaheks jaotada. Esimeses piirkonnas nurk $\theta$ pöördub asendist $OB$ asendisse $OA$. Sellisel juhul kaugus muutub koordinaatide alguspunktist sfäärini, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis. Teises piirkonnas nurk $\theta$ pöördub asendist $OA$ $y$-teljeni. Siis kaugus muutub koordinaatide alguspunktist sfäärini, mille keskpunktiks on $B(0;0;R)$ , st sfäärini $x^2+y^2+z^2=2Rz$.

Esimeses piirkonnas $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$ ja sfääri, mille keskpunkt on koordinaatide alguses, kõik punktid on koordinaatide alguspunktist sfääri raadiuse $R$ kaugusel. Seega esimeses piirkonnas

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq r \leq R$$

Tulemuse, et sfääri $x^2+y^2+z^2=R^2$ võrrand sfäärkoordinaatides on $r=R$, saaksime ka, kui asendaksime $x$, $y$ ja $z$ valemite (7.30) abil.

Teises piirkonnas $\theta$ pöördub asendist $OA$ $y$-teljeni, st $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Sel juhul kaugus muutub 0-st kuni sfäärini, mille keskpunkt on punktis $B$. Asendades selle sfääri võrrandisse $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$ muutujad $x$, $y$ ja $z$ valemite (7.30) abil, saame

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = 2Rr\cos\theta$$

ehk

$$r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta = 2Rr\cos\theta$$

st

$$r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2Rr\cos\theta$$

millest

$$r^2 = 2Rr\cos\theta$$

ja pärast $r$-ga jagamist saame sfääri keskpunktiga $B$ võrrandiks sfäärkoordinaatides

$$r = 2R\cos\theta$$

Järelikult on teine piirkond kirjeldatav tingimustega

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq 2R\cos\theta$$

ja antud kolmekordne integraal sfäärkoordinaatides on

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int\limits_0^R f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr + \\ &+ \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr\end{aligned}$$

Lõpuks arvutame valemi (7.23) abil näites vaadeldud kahe kera ühisosa ruumala

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int\limits_0^R r^2\sin\theta dr + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} r^2\sin\theta dr$$

Alustame esimesest liidetavast. Kõigepealt integreerime muutuja $r$ järgi

$$\int\limits_0^R r^2\sin\theta dr = \sin\theta \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R = \frac{R^3}{3}\sin\theta$$

seejärel $\theta$ järgi

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{R^3}{3}\sin\theta = -\frac{R^3}{3}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{R^3}{3}(\frac{1}{2}-1) = \frac{R^3}{6}$$

ja siis $\varphi$ järgi

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^3}{6}d\varphi = \frac{R^3}{6}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^3}{3}$$

Integreerime teises liidetavas $r$ järgi

$$\int_0^{2R\cos\theta} r^2\sin\theta dr = \sin\theta\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2R\cos\theta} = \frac{8R^3}{3}\sin\theta\cos^3\theta$$

teiseks $\theta$ järgi

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8R^3}{3}\sin\theta\cos^3\theta d\theta &= -\frac{8R^3}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d(\cos\theta)\\ = \quad -\frac{8R^3}{3}\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} &= -\frac{8R^3}{3}(0-\frac{1}{16\cdot 4}) = \frac{R^3}{24}\end{aligned}$$

ja kolmandaks $\varphi$ järgi

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^3}{24}d\varphi = \frac{R^3}{24}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^3}{12}$$

Liites tulemused, saame kahe kera ühisosa ruumala

$$V = \frac{\pi R^3}{3} + \frac{\pi R^3}{12} = \frac{5\pi R^3}{12}$$